Semaine 11:

Ondes électromagnétiques

Equations de Maxwell dans le vide

En général:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Dans le vide (ni charges, ni courants)

$$\rho_f = 0;\ \mathbf{J}_f = 0;\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E};\ \mathbf{H} = \left(1/\mu_0\right)\mathbf{B}$$

$$\Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ondes électromagnétiques dans le vide

Eq. Maxwell dans le vide: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Identité vectorielle (math.): $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{X}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{X}) - \nabla^2 \mathbf{X}$

$\Rightarrow$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}$$

Equation d'onde pour **B** et **E** dans le vide

Note: Les équations de Maxwell impliquent que l'espace vide supporte la propagation des ondes électromagnétiques voyageant à vitesse:

$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 299792458$ m/s (exact, par convention) ($\cong 3 \times 10^8$ m/s)

Equations de Maxwell dans la matière «simple»

En général:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Dans la matiere "simple" (ni charges libre, ni courants libre) :

$$\rho_f = 0;\ \mathbf{J}_f = 0;\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E};\ \mathbf{H} = \left(1/\mu_0 \mu_r\right)\mathbf{B}$$

$$\Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ondes électromagnétiques dans la matière «simple»

Eq. Maxwell dans le vide: $\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \quad \nabla\times\mathbf{B}=\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$

Identité vectorielle (math.): $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{X})=\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{X}\right)-\nabla^2\mathbf{X}$

$\Rightarrow$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)-\nabla^2\mathbf{E}=-\nabla^2\mathbf{E}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})=\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{B}\right)-\nabla^2\mathbf{B}=-\nabla^2\mathbf{B}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})=\nabla\times\left(\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)=\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E}=\frac{1}{c^{*2}}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2\mathbf{B}=\frac{1}{c^{*2}}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad \text{avec} \quad c^*=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}c}$$

Equation d'onde
pour **B** et **E**
dans la matière «simple»

Vitesse des ondes électromagnétiques

Dans le **vide**:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \triangleq 299792458 \text{ m/s}$$

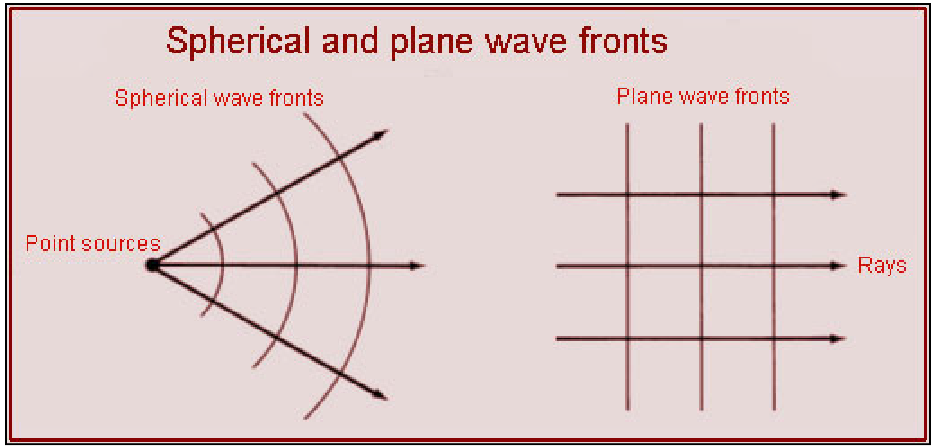
(exact, Conf. des poids et mesures 1983 (définition du mètre))

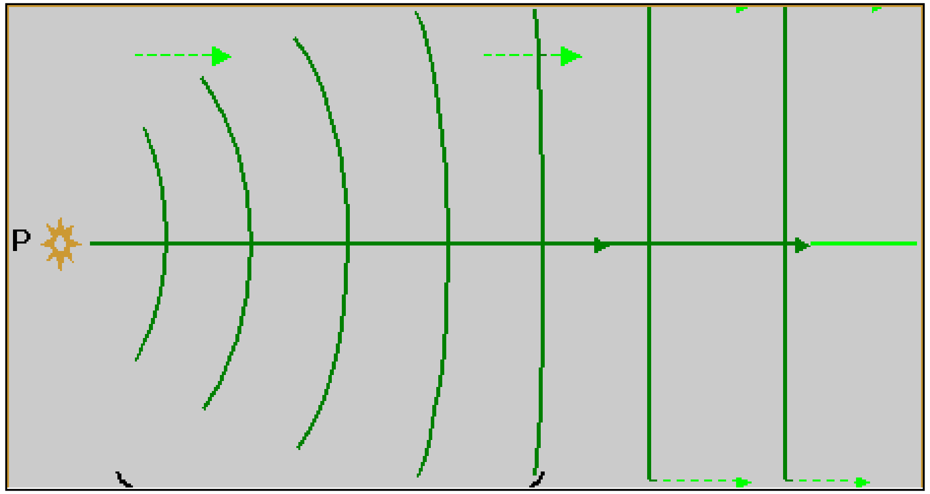
Dans la **matiere "simple"**:

$$c^* = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} c$$

Note: Dans la matiere $\mu_r \varepsilon_r \geq 1 \quad \Rightarrow \; c^* \leq c$

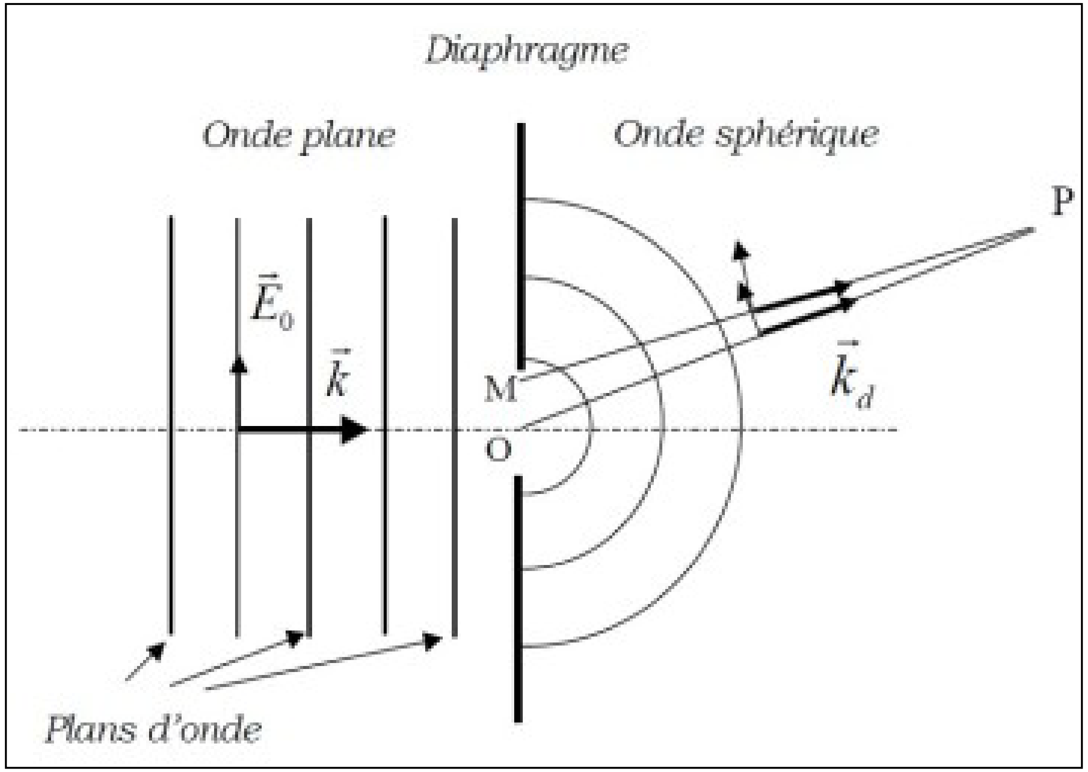
Ondes planes et sphériques





Sphérique
(proche de la source)

Plane
(loin de la source)



Onde **plane** monochromatique:

$$\psi(\mathbf{x},t) = A\cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t + \varphi_0\right)$$

Intensité indépendant de la distance de la source.

$\mathbf{k}$: vecteur d'onde

direction de propagation: $\hat{\mathbf{k}} = \dfrac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$

longeur d'onde: $\lambda = \dfrac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$

Note: Une onde plane "exacte" n'existe pas dans la réalité, mais c'est une bonne approximation dans de nombreux cas réels, comme dans le cas d'une région de l'espace qui est petite par rapport à la distance de la source de l'onde.

Onde **sphérique** monochromatique:

$$\psi(\mathbf{x},t) = \frac{A}{|\mathbf{x}|}\cos\left(k|\mathbf{x}| - \omega t + \varphi_0\right)$$

Intensité décroissante en fonction de la distance de la source

k : numéro d'onde

direction de propagation: *isotropique* à partir de $\mathbf{x} = 0$

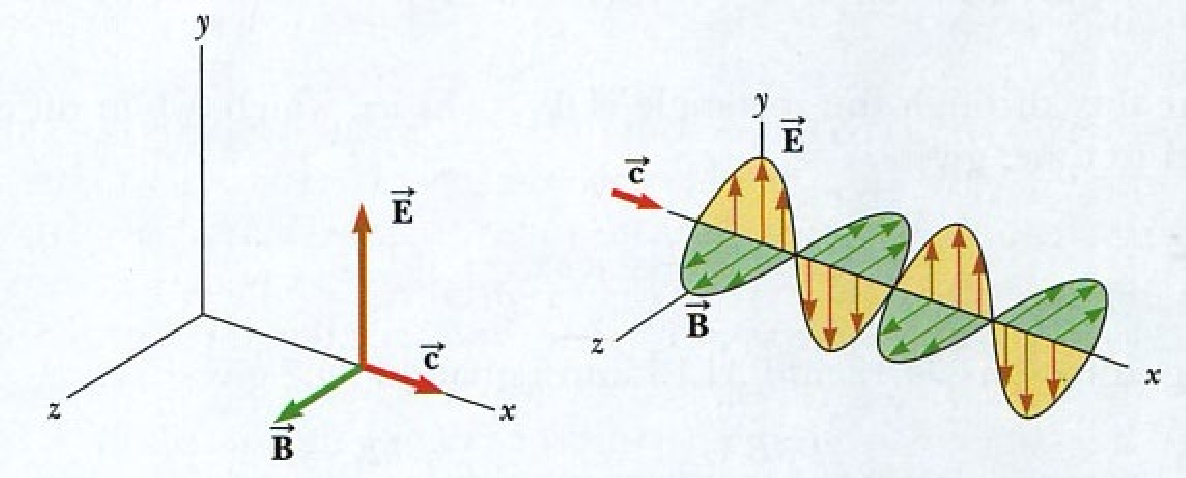
longeur d'onde: $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

Ondes planes électromagnétiques dans le vide

$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_0 \cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t + \varphi_0\right)$ $\qquad$ $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}_0 \cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t + \varphi_0\right)$

vecteur d'onde: $\mathbf{k}$ $\qquad$ pulsation: $\omega = c\left|\mathbf{k}\right| = ck$

longeur d'onde: $\lambda = \dfrac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$ $\qquad$ direction de propagation: $\hat{\mathbf{k}} = \dfrac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$



Liaison entre $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ (demonstration: G395, Z540):

$$\mathbf{B}_0 = \frac{k}{\omega}\left(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_0\right) = \frac{1}{c}\left(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_0\right)$$

$\Rightarrow$

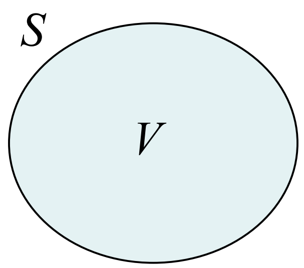
$\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ sont:

- perpendiculaires à la direction de propagation (onde transverse) (i.e., $\mathbf{B}\perp\mathbf{k},\ \mathbf{E}\perp\mathbf{k}$)
- perpendiculaires entre eux (i.e., $\mathbf{B}\perp\mathbf{E}$)
- $\left|\mathbf{B}_0\right| = (1/c)\left|\mathbf{E}_0\right|$

Energie pour une onde électromagnétique

Pour une onde EM se propageant à travers un volume V de l'espace vide entourée par une surface S :

$$\boxed{\int_V \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} dV + \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \qquad \text{avec} \quad u_{EM} = \frac{\varepsilon_0 \,|\, \mathbf{E} \,|^2}{2} + \frac{|\, \mathbf{B} \,|^2}{2\mu_0}}$$



Note 1:

Pour les ondes électromagnétiques $B_0 = (1/c)E_0 \;\; \Rightarrow \dfrac{\varepsilon_0 \,|\, \mathbf{E} \,|^2}{2} = \dfrac{|\, \mathbf{B} \,|^2}{2\mu_0} = \dfrac{1}{2} u_{EM}$

(dans une onde EM la densité d'énergie magnétique et électrique est la même)

Démonstration: En général (voir chapitre "Electrodynamique"):

$$\int_V P_{diss} dV + \int_V \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} dV + \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

ou:

$P_{diss} = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$ densité de puissance EM "dissipée" (W/m^3)

$u_{EM} = (1/2)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ densité d'énergie EM (J/m^3)

$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ densité de flux de puissance traversant la surface S (W/m^2)(vecteur de Poynting)

Dans le vide:

$$\mathbf{J}_f = 0 \Rightarrow P_{diss} = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \;\; \text{et} \;\; \mathbf{H} = (1/\mu_0)\mathbf{B} \Rightarrow u_{EM} = (1/2)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}$$

$\Rightarrow$

$$\int_V \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} dV + \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad \text{avec} \quad u_{EM} = \frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}$$

Quantité de mouvement d’une onde EM dans le vide

Il y a une quantité de mouvement associée au champ EM:

$$\boxed{\mathbf{p} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}}$$

Densité de quantité de mouvement transportée par l’onde ((masse x vitesse)/volume)

$$[\mathbf{S}] = \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

$$[\mathbf{p}] = \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\right] = \left[\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\frac{1}{\mathrm{m}^3}\right] = \left[\frac{\text{masse}\times\text{vitesse}}{\text{volume}}\right]$$

Valeurs *moyennes* (*moyennes dans le temps*) pour une onde EM plane monocromatique dans le vide

Pour une onde EM plane dans le vide ($c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \cong 3\times 10^8$ m/s) les **valeurs moyennes** (*moyennes dans le temps*) sont:

$$\boxed{\left\langle \left|\mathbf{S}\right| \right\rangle \triangleq \left\langle \left| \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\right| \right\rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 = c\left\langle u_{EM}\right\rangle}$$

Vecteur de Poynting *moyenne*

$$\boxed{I_{moy} \triangleq \frac{1}{A}\left\langle \frac{\partial W}{\partial t}\right\rangle = \langle |\mathbf{S}|\rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 = c\left\langle u_{EM}\right\rangle}$$

Intensité *moyenne*

$$\boxed{\left\langle u_{EM}\right\rangle \triangleq \left\langle \frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}\right\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = c\left\langle \left|\mathbf{p}\right|\right\rangle}$$

Densité d'energie *moyenne*

$$\boxed{\left\langle \left|\mathbf{p}\right|\right\rangle \triangleq \left\langle \left|\varepsilon_0 \left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\right|\right\rangle = \left\langle \left|\frac{\mathbf{S}}{c^2}\right|\right\rangle = \frac{1}{2c}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{c^2}\left\langle \left|\mathbf{S}\right|\right\rangle = \frac{I_{moy}}{c^2}}$$

Quantité de movement *moyenne*

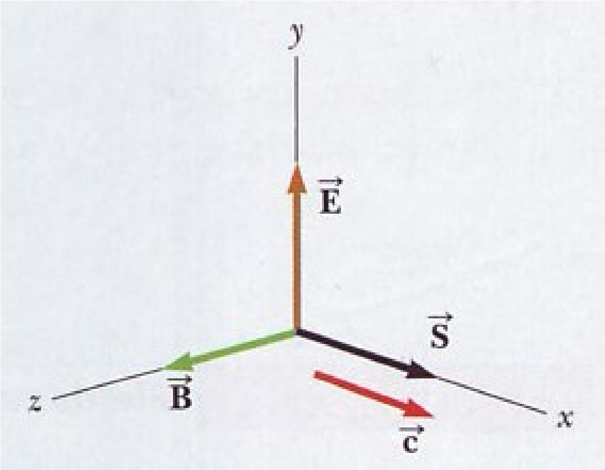
Démonstration:

Pour une onde EM dans le vide: $|\mathbf{B}| = (1/c)|\mathbf{E}|$ et $\mathbf{H} = (1/\mu_0)\mathbf{B}$

$\Rightarrow$

Le vecteur de Poynting moyenne $\langle|\mathbf{S}|\rangle$ de l'onde EM plane dans le vide est:

$$\langle|\mathbf{S}|\rangle = \langle|\mathbf{E}\times\mathbf{H}|\rangle = \langle|\mathbf{E}||\mathbf{H}|\rangle = \langle|\mathbf{E}||(1/\mu_0)\mathbf{B}|\rangle = \langle|\frac{|\mathbf{E}|^2}{\mu_0 c}|\rangle = \left\langle\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2}\frac{cB_0^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$$



L' intensité moyenne I_{moy} de l'onde EM plane dans le vide EM plane dans le vide est :

(i.e., le flux moyen sur une periode d'énergie EM par unité de temps et de surface) est:

$$I_{moy} \triangleq \frac{1}{A}\left\langle\frac{\partial W}{\partial t}\right\rangle = \langle|\mathbf{S}|\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2}\frac{cB_0^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$$

$$\left\langle\cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)\right\rangle = \frac{\int_0^T \cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)\,dt}{T} = \frac{\int_0^T \cos^2\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\frac{2\pi}{T}t\right)dt}{T} = \frac{\frac{T}{2}}{T} = \frac{1}{2}$$

Les valeurs moyennes <…> sont calculées dans le temps.

La densité d'energie moyenne de l'onde EM plane dans le vide EM plane dans le vide est:

$$\langle u_{EM}\rangle = \left\langle\frac{\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}\right\rangle = \left\langle\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2\right\rangle = \left\langle\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)\right\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2\mu_0}B_0^2$$

Note 1: $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c|\mathbf{E}|^2 = u_{EM}\mathbf{c}$

Note 2: Pour les ondes mechaniques $I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 v\xi_0^2$ (voir chapitre "Ondes").

Pression de radiation

Lorsqu'une onde EM frappe une surface, elle lui cède de la quantité de mouvement :

Quantité de mouvement EM absorbée par unité de temps et de surface

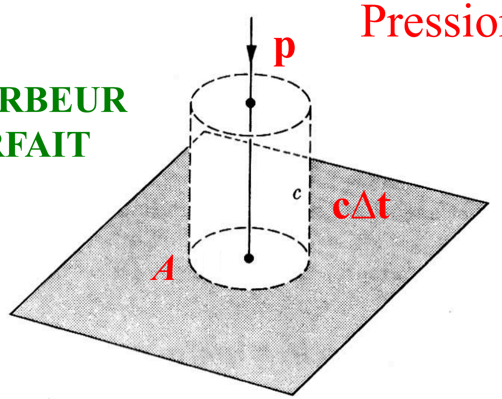
=

Force/unité de surface

=

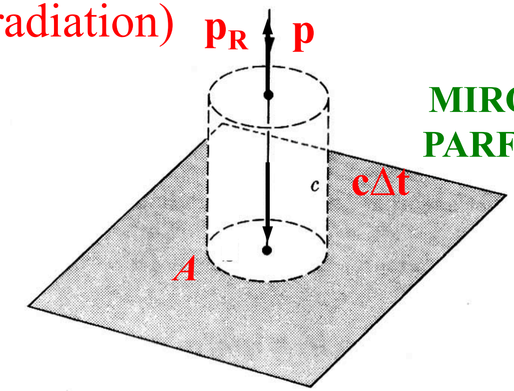
Pression EM (pression de radiation)

ABSORBEUR PARFAIT



p : Densité de quantité de mouvement transportée par l'onde $\left(\frac{\text{masse}\times\text{vitesse}}{\text{volume}}\right)$

MIROIR PARFAIT



$\Delta\mathbf{p}$ = quantité de mouvement transportée à la surface en Δt :

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}cA\Delta t = -pcA\Delta t\,\hat{\mathbf{z}} = -\frac{I}{c^2}cA\Delta t\,\hat{\mathbf{z}} = -\frac{I}{c}A\Delta t\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$[\langle pressure_{rad}\rangle] = \text{Pa}$$

$$\frac{\mathbf{p}-0}{A\Delta t} = -\frac{I}{c}\hat{\mathbf{z}}$$

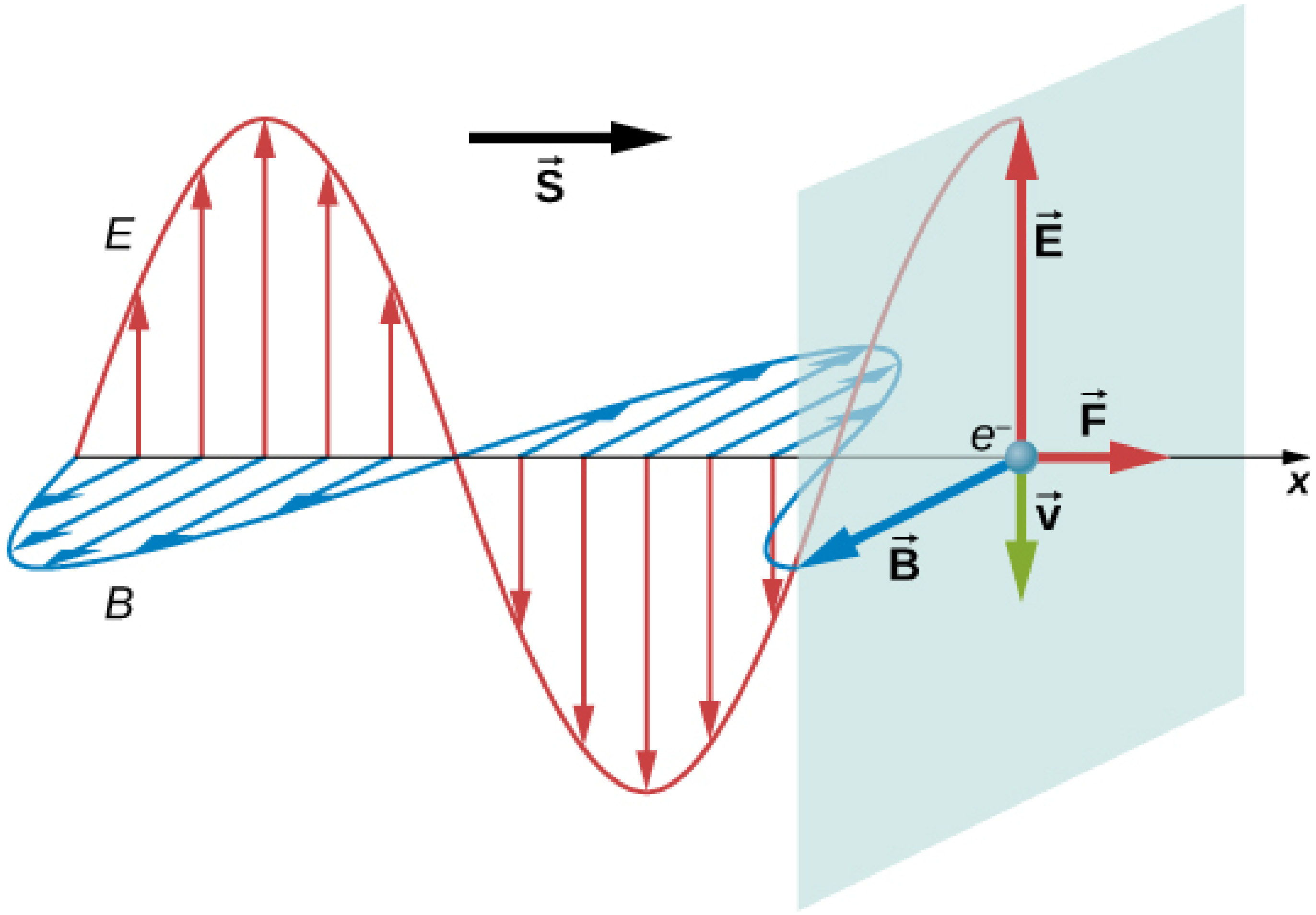
$$\frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}_R}{A\Delta t} = \frac{2\mathbf{p}}{A\Delta t} = -2\frac{I}{c}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\langle pressure_{rad}\rangle = \frac{I_{moy}}{c} = \frac{\langle|\mathbf{S}|\rangle}{c} = \langle u_{EM}\rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

$$\langle pressure_{rad}\rangle = \frac{2I_{moy}}{c} = \frac{2\langle|\mathbf{S}|\rangle}{c} = 2\langle u_{EM}\rangle = \frac{B_0^2}{\mu_0}$$

Pression de radiation: explication intuitive pour un métal

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



Notes:

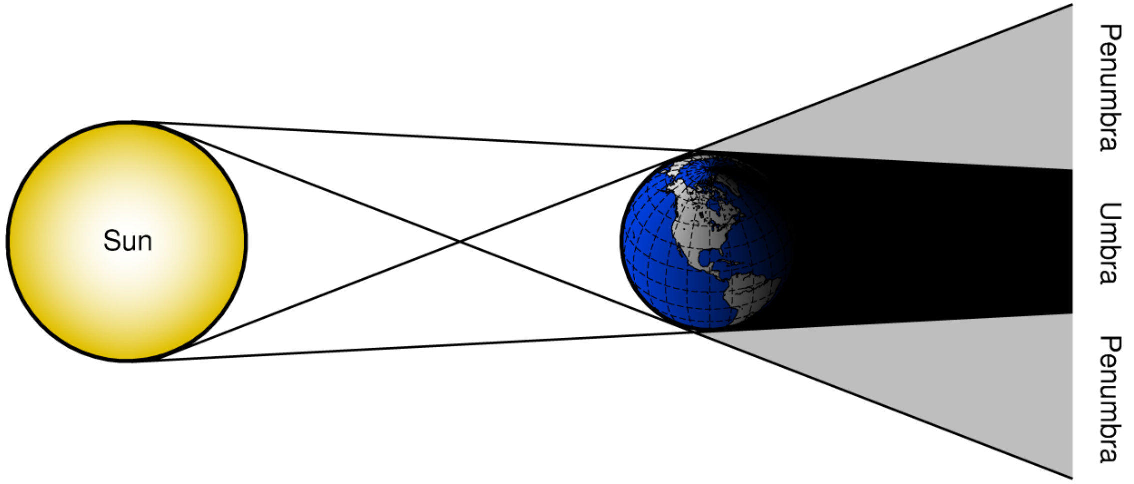
1) Pour la rélativité, l'énergie d'une particule de masse au repos m_0 est:

$$E^2 = m_0{}^2 c^4 + c^2 p^2$$

Pour $m_0 = 0$ (photon) $\Rightarrow p = \dfrac{E}{c}$ (q.d.m d'un photon avec énergie $E = \hbar\omega = hf$, f : fréquence de l'onde)

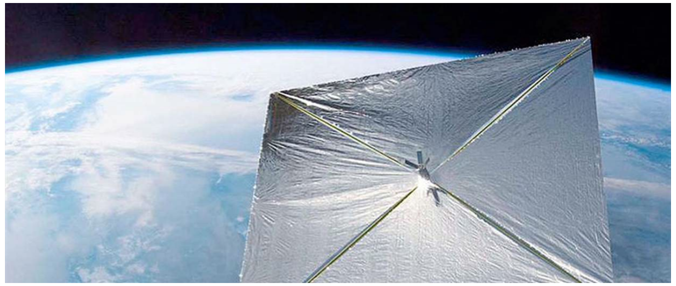
2) La pression de radiation de la lumière du Soleil sur un miroir sur la Terre est de l'ordre de 10^{-11} bar ($P \cong 6\times10^{-6}$ Pa) (i.e., 10^{-11} plus faible de la pression atmospherique).

La force totale de la lumière du Soleil sur la Terra entière est $F_{tot} = \pi R^2 P \cong 7\times10^8$ N $\cong$ 70'000 tons

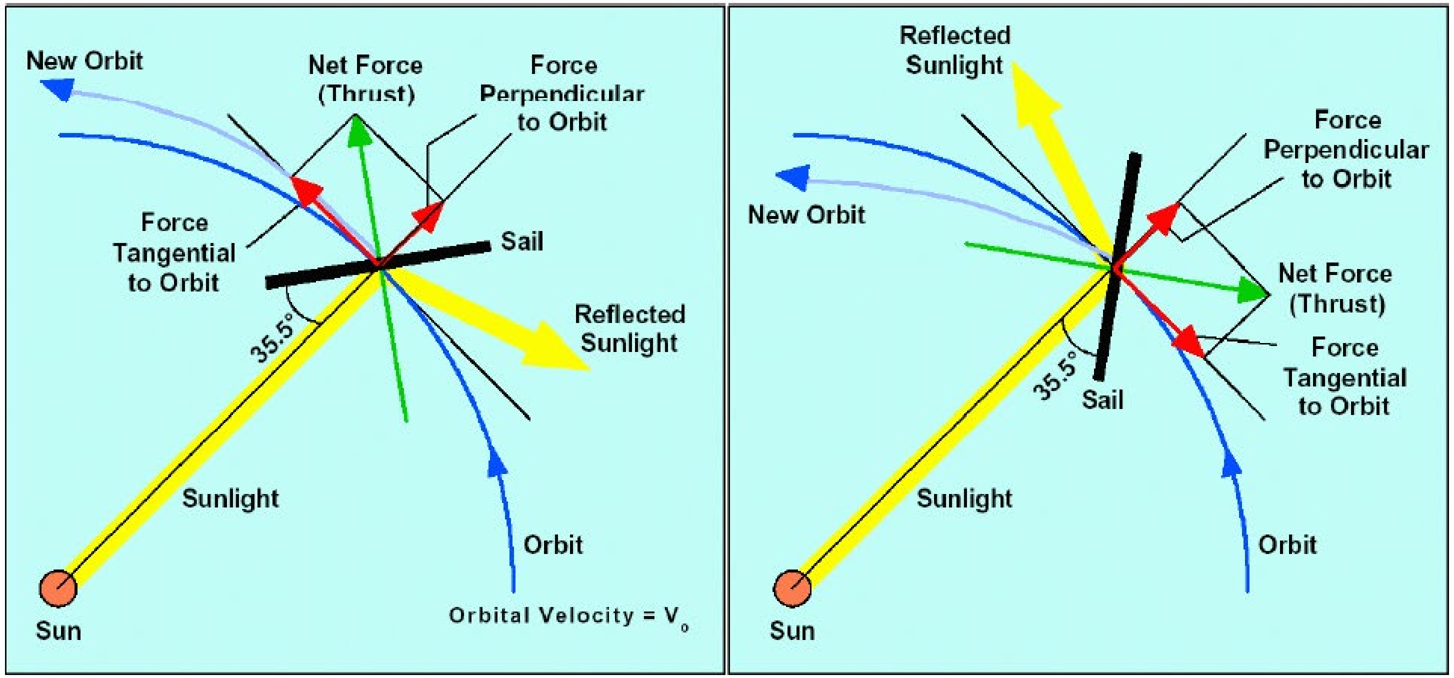


3) Les forces générées par la pression de rayonnement sont généralement petites.
Cependant, ils jouent un rôle crucial dans certains contextes, comme l'astrodynamique.
Par exemple:

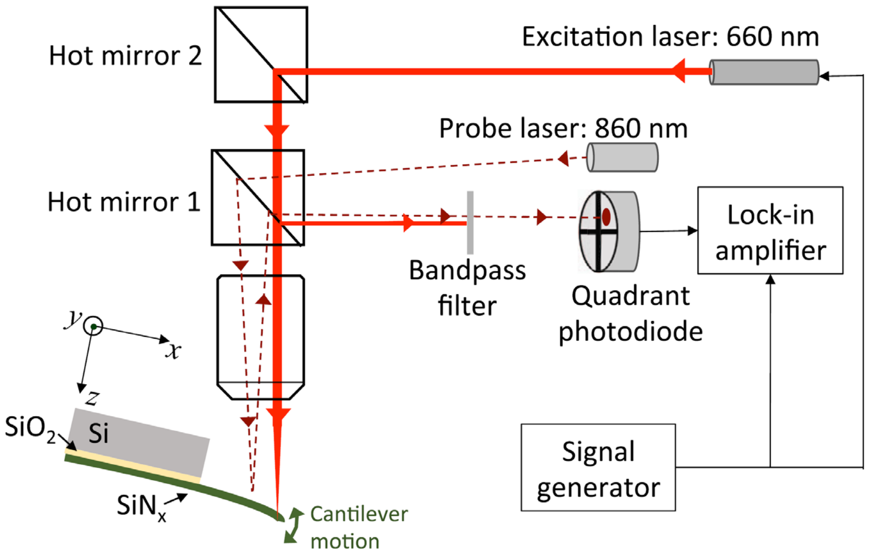
- si les effets de la pression du rayonnement solaire sur l'engin spatial du programme Viking avaient été ignorés, l'engin spatial aurait manqué l'orbite de Mars d'environ 15'000 km.

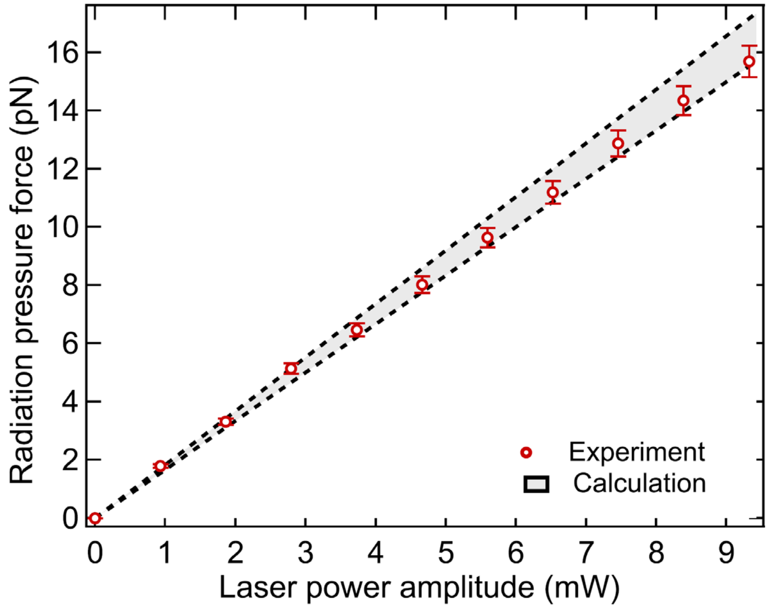


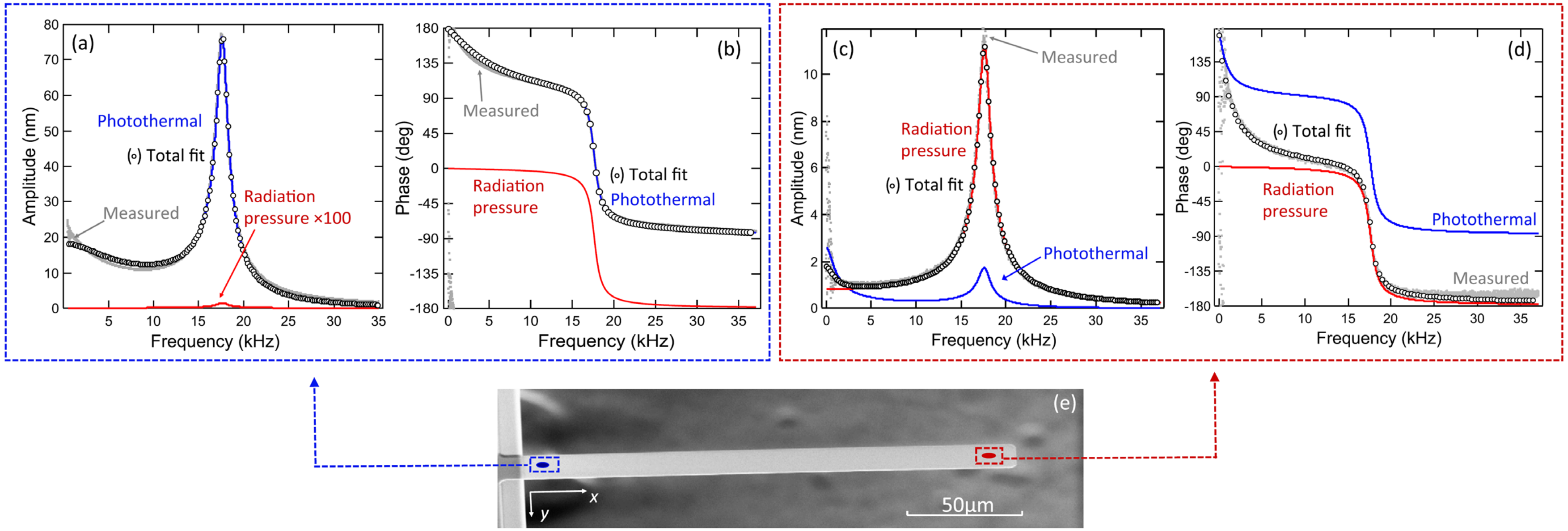
- L'Agence japonaise d'exploration aérospatiale (JAXA) a déployé avec succès une "voile solaire" dans l'espace qui a déjà réussi à propulser sa charge utile avec le projet IKAROS.



4) Pression de radation d'un LASER sur un micro-levier





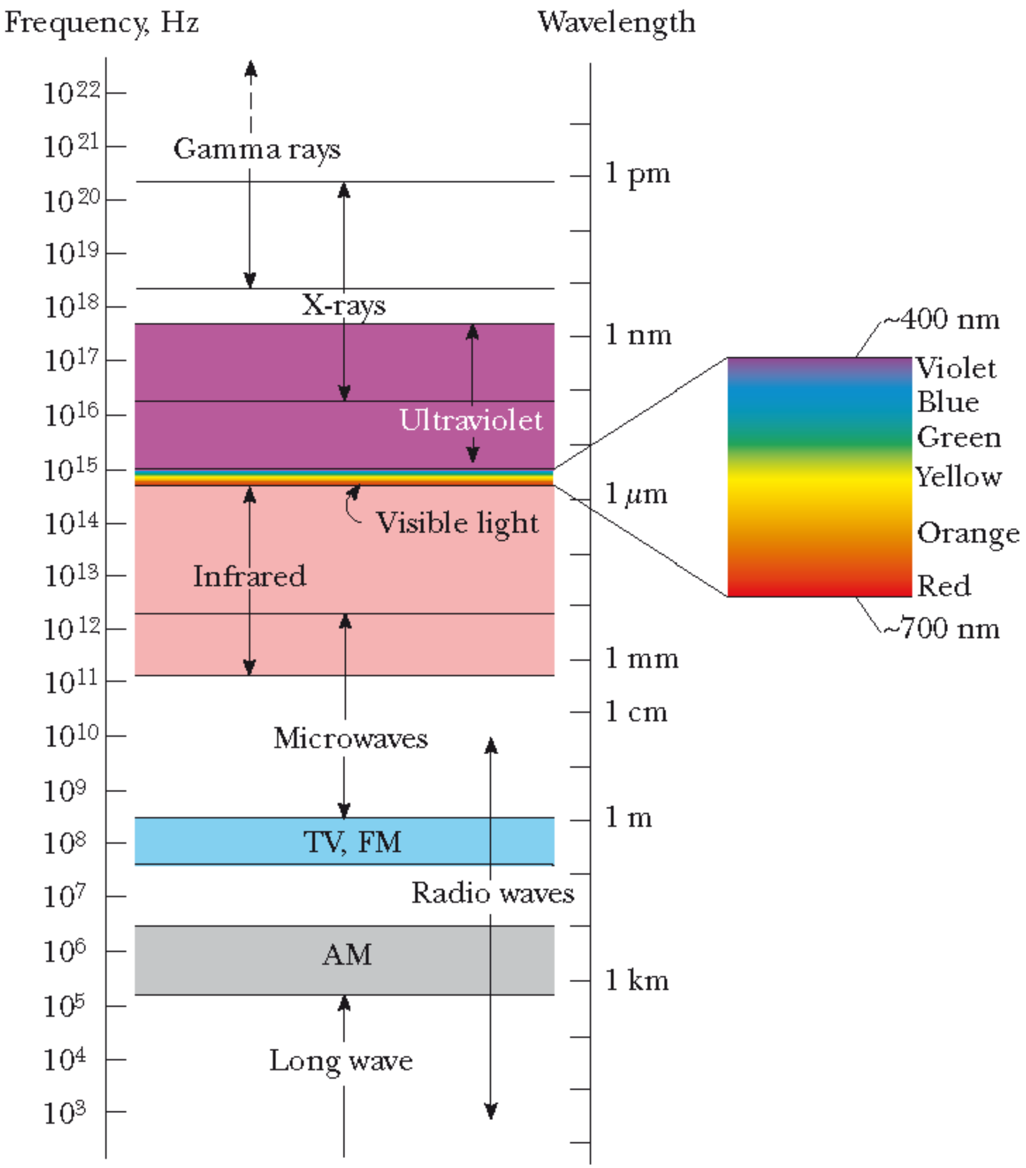


Rayonnement électromagnétique

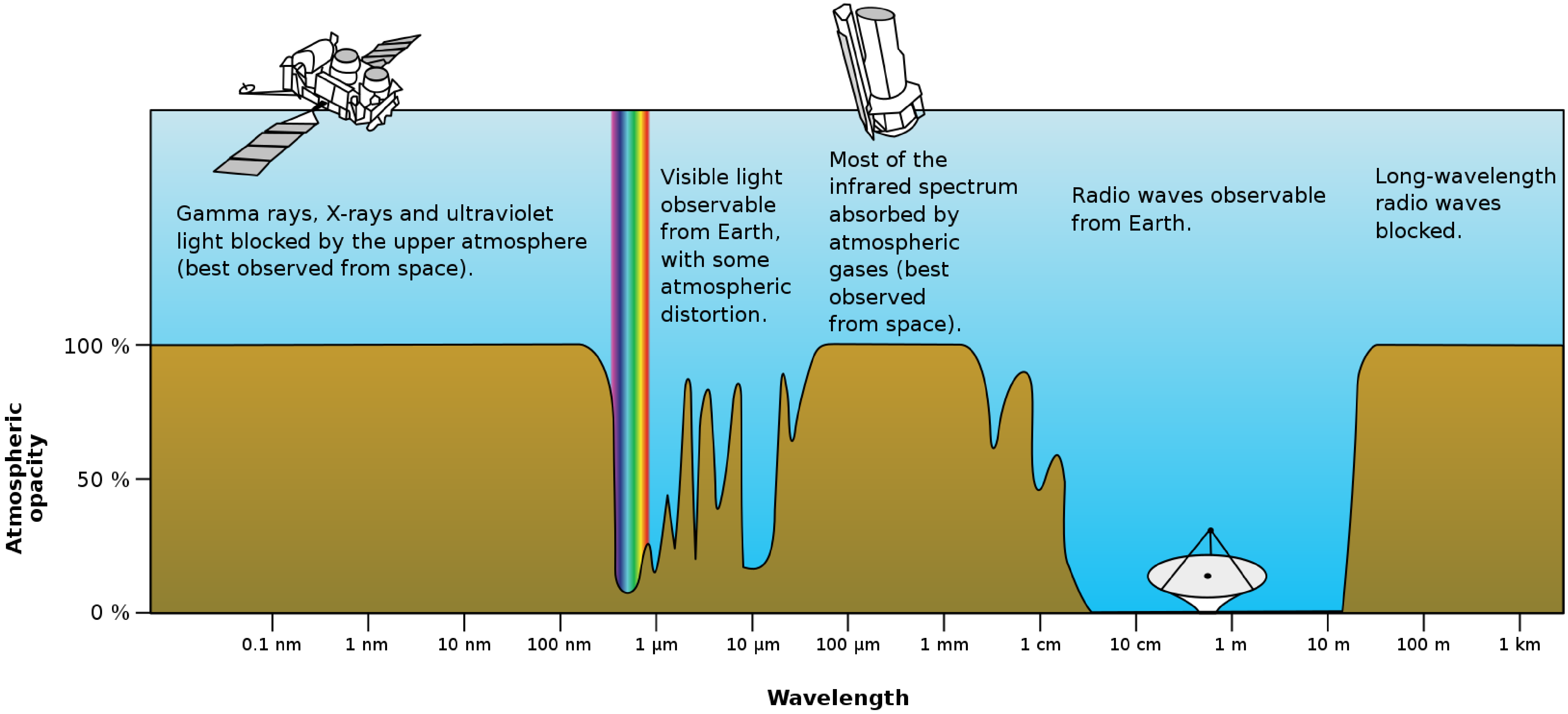
Sources des onde électromagnétiques:

- charges **accélérées**

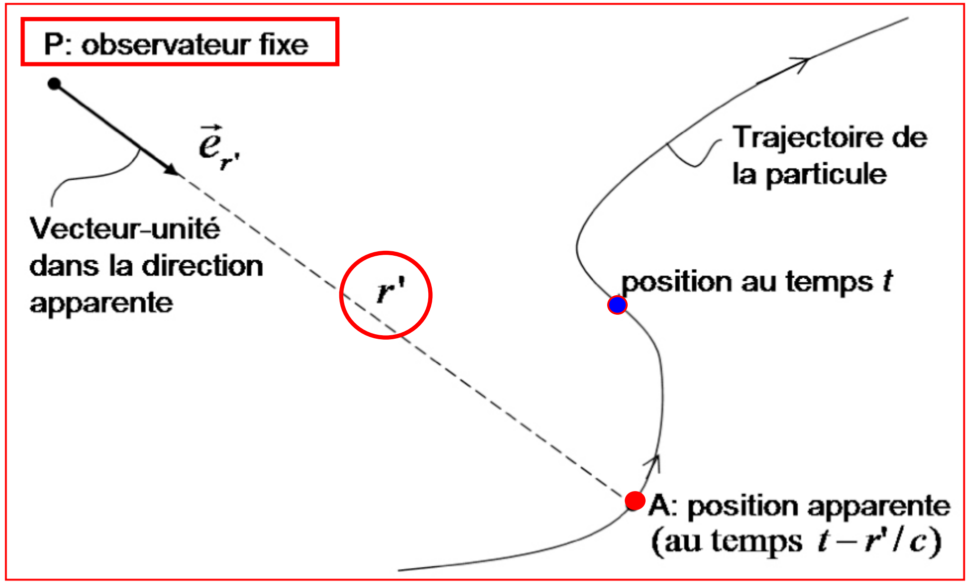
- transitions entre deux états quantique à l'échelle atomique et nucléaire.



Transmission des ondes à travers l’atmosphère terrestre



Champ EM créé par une charge en mouvement



Le champ EM en $(\mathbf{x}_P, t)$ dépend de la position, vitesse, et accélération de la charge au temps antérior

$$t' = t - (r'/c)$$

Sans démonstration:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_P, t) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_{r'} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_P, t) = -\frac{1}{c} \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}_P, t)$$

r' : distance entre l'observateur et la charge au temps $t' = t - (r'/c)$

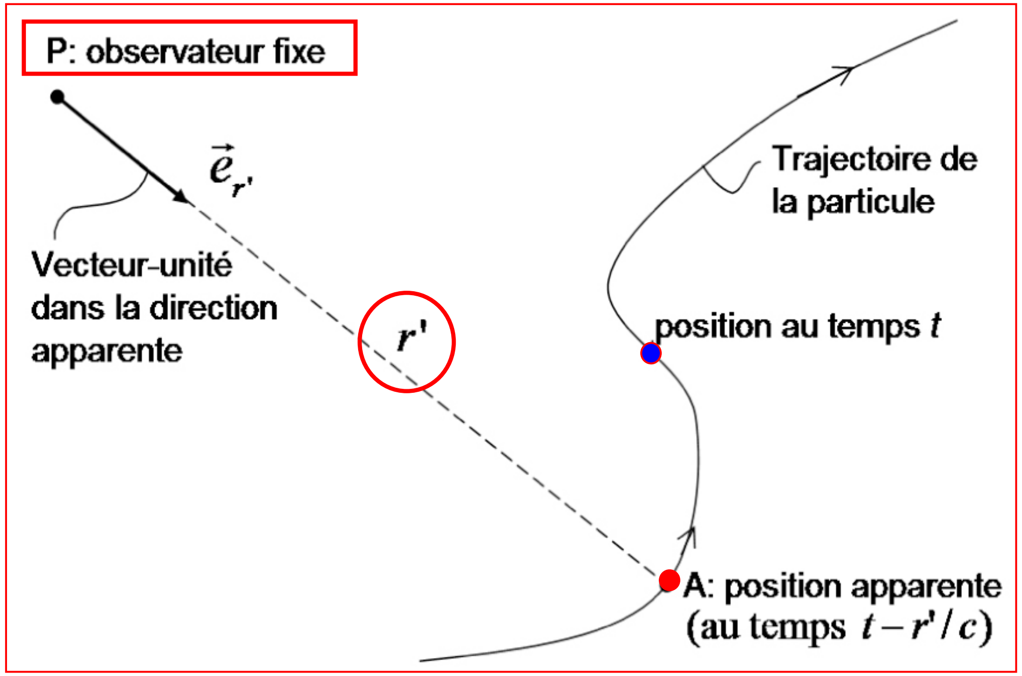
"acceleration" "vitesse" "position"

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_P,t)=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{e}_{r'}}_{(1)}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2}\right)+\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2}}_{(2)}\right]$$

On peut montrer que pour des "grandes distances" r' :

(1) : varie avec la distance r' comme $1/r'$

(2) : varie avec la distance r' comme $1/r'^2$



Note: Pour des grandes distances r',
l'amplitude du champ **E** de l'onde EM va en $\sim 1/r'$,
alors que pour le champ **E** statique elle va en $1/r'^2$.
L'amplitude du champ **E** dans l'onde EM diminue comme $1/r'$,
donc l'intensité de l'onde EM ($\propto E^2$) diminue comme $1/r^2$.

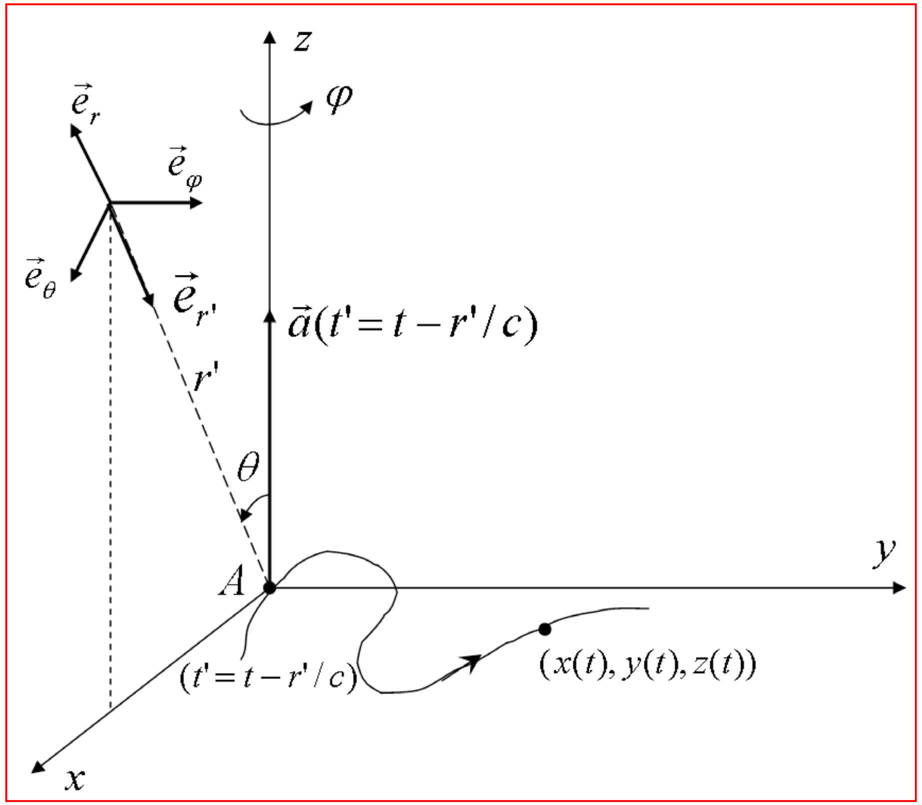
Plus en détails:

On peut montrer que le champ EM créé par une particule chargée accélérée à faible vitesse (i.e., $v<<c$) et grandes distances (i.e., $r' >>$ amplitude du mouvement de la particule) est :

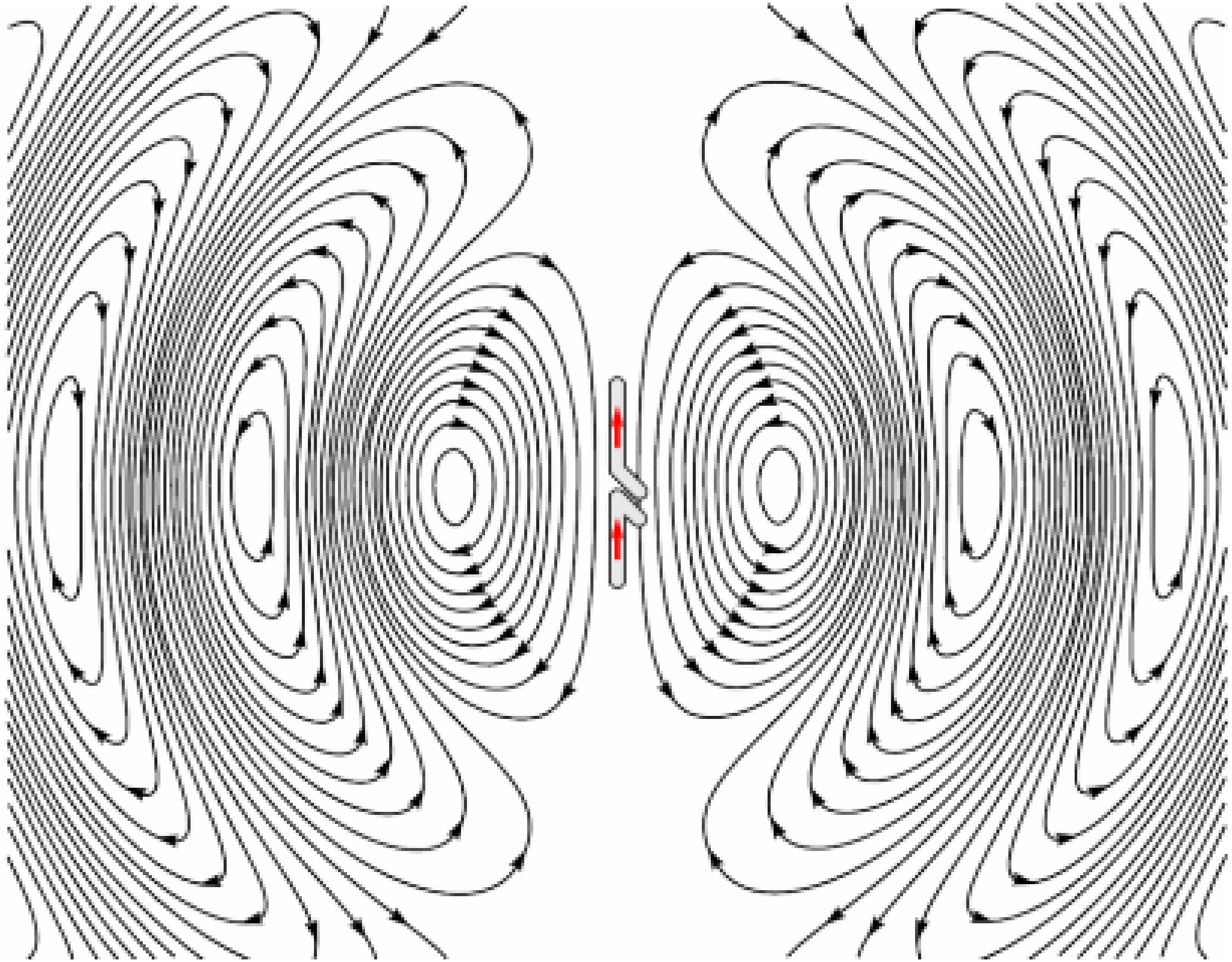
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_P,t) \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{a_z\left(t'=t-r'/c\right)\sin\theta}{r'}\mathbf{e}_\theta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{a_\theta\left(t'=t-r'/c\right)}{r'}\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_P,t) \cong \frac{E(\mathbf{x}_P,t)}{c}\mathbf{e}_\varphi$$

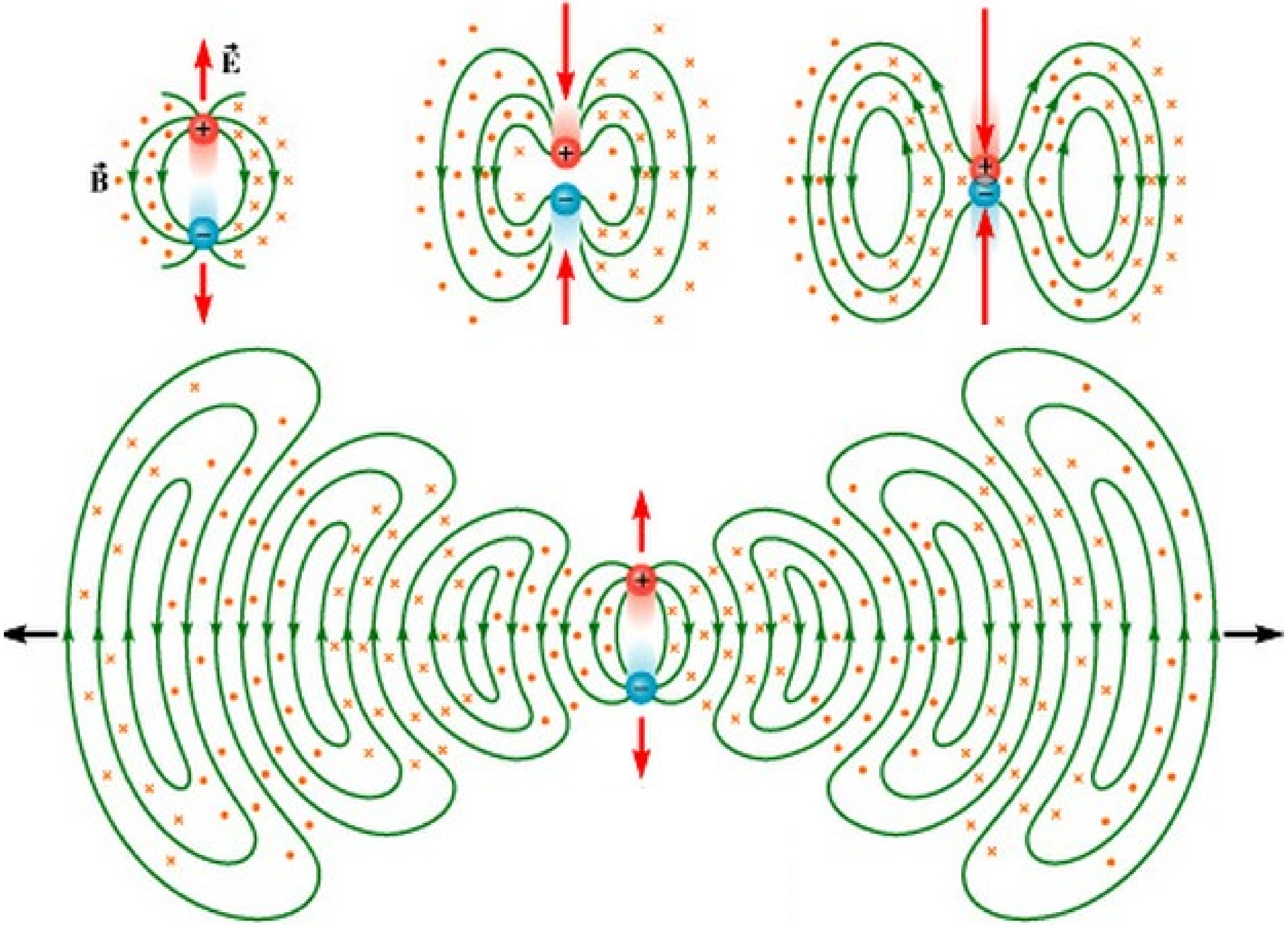
Le champ **E** est ***transverse*** et proportionnel à la composante $\boldsymbol{a}_\theta$ (perp. à r') de l'accélération.



Champs créé par un dipôle électrique oscillant



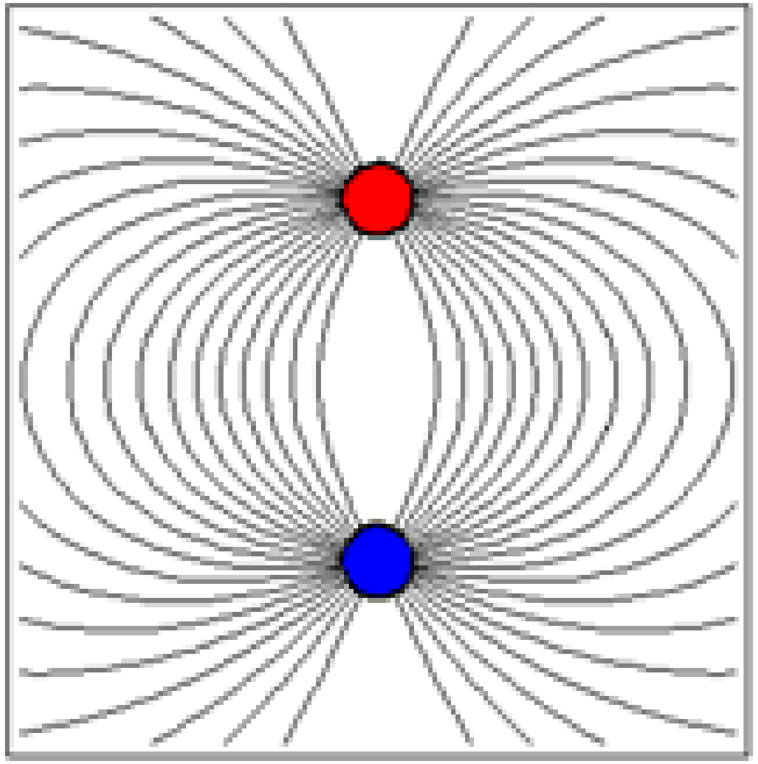
(animation)



$\vec{E}$
$\vec{B}$

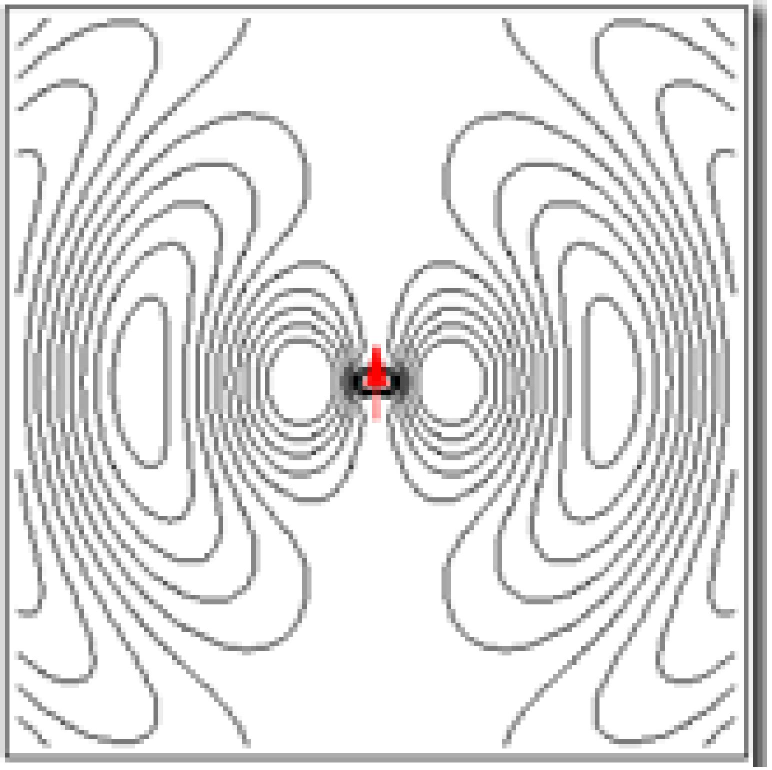
Dipôle électrique statique

(génère un champ électrique statique)

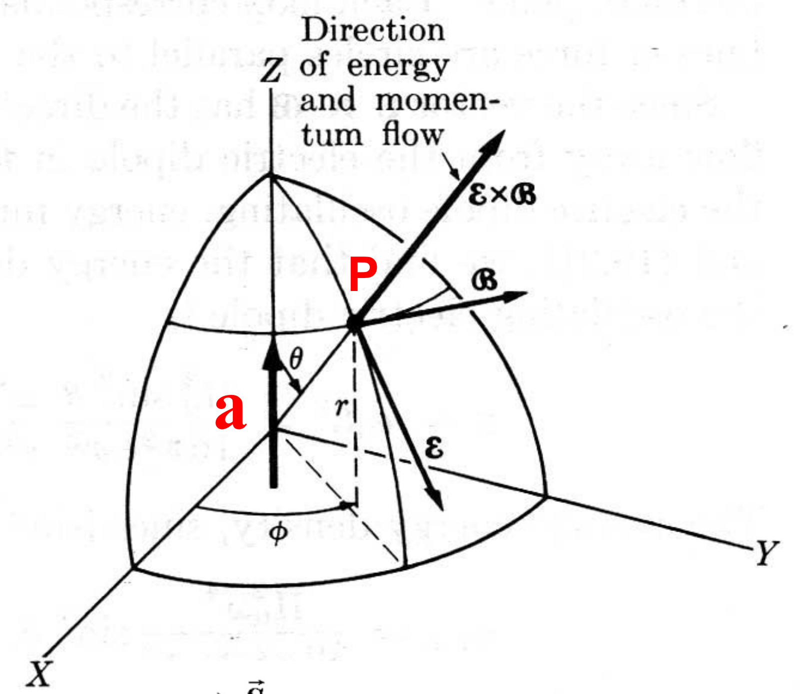


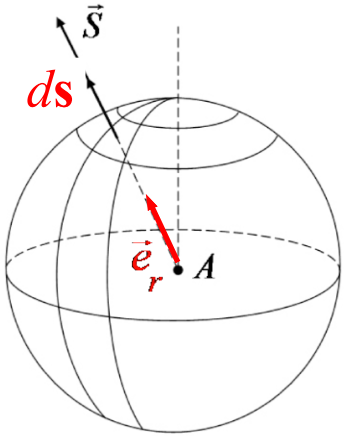
Dipôle électrique oscillant

(génère un champ électrique oscillant
et
un champ magnétique oscillant)



Puissance rayonnée par une charge accélérée





une sphère de rayon R
centrée sur la charge q

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_P,t) \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{a_\theta\left(t'=t-r'/c\right)}{r'}\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_P,t) \cong \frac{E(\mathbf{x}_P,t)}{c}\mathbf{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2\, \mathbf{E}\times\mathbf{B} = \varepsilon_0 c^2\, E_\theta\, \mathbf{e}_\theta \times \frac{E_\theta}{c}\,\mathbf{e}_\varphi = \varepsilon_0 c\, E_\theta^2\; \mathbf{e}_r$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{S} = \frac{q^2 a_\theta^2(t'=t-r'/c)}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r'^2}\mathbf{e}_r$$

$$P_{rad} = \oint_S \mathbf{S}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{q^2 a^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2} R^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow$$

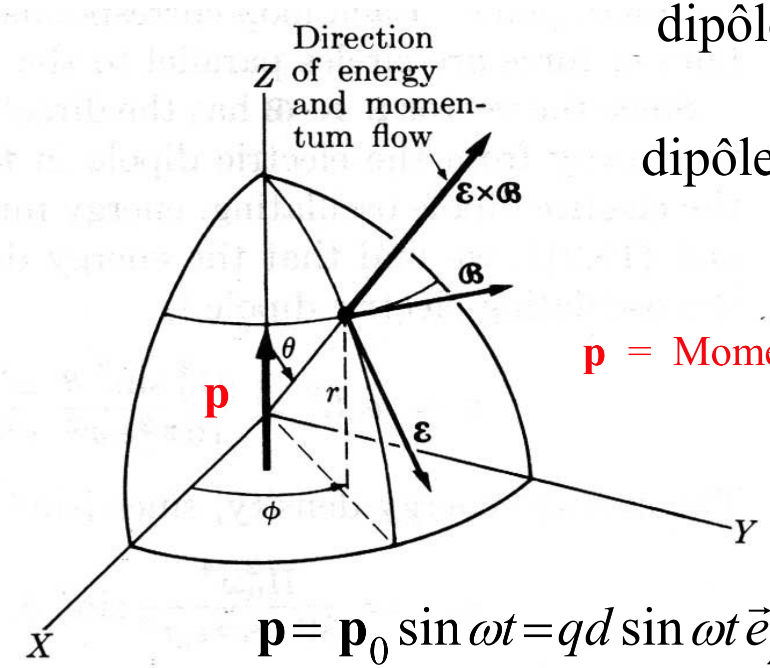
$$\boxed{P_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}a^2}$$

Formule de Larmor

$$\left[P_{rad}\right] = \left[\mathrm{W}\right]$$

P_{rad} est la puissance rayonnée par la particule accélerée
(= energie perdue par unité de temps par la particule accélerée sous forme d'onde EM du fait de son accéleration)

Puissance rayonnée par un dipôle électrique oscillant



$$\text{dipôle statique: } \mathbf{p} = \text{const} \Rightarrow \mathbf{E} = \text{const} \neq 0;\ \mathbf{B} = 0$$

$$\text{dipôle oscillant: } \mathbf{p} = \mathbf{p}(t) \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}(t) \neq 0;\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(t) \neq 0$$

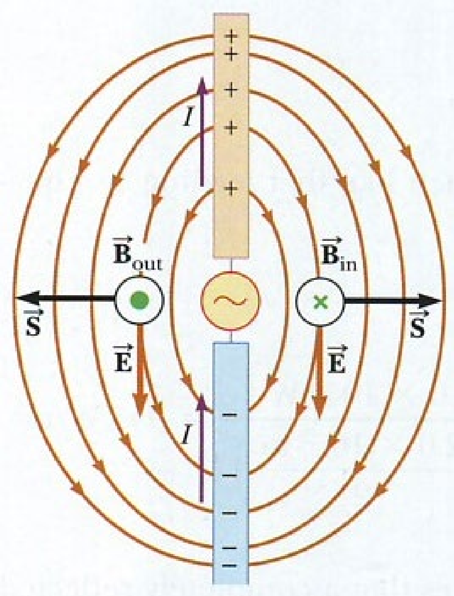
$\mathbf{p}$ = Moment de dipôle électrique

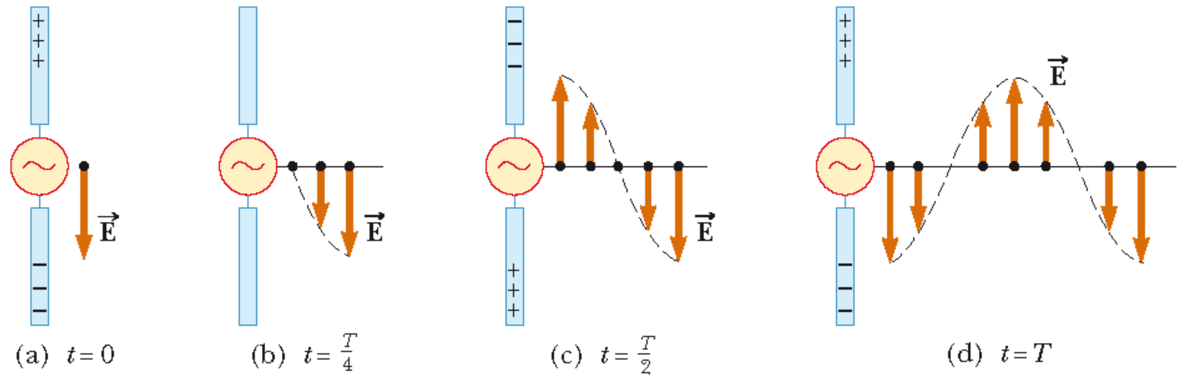
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \sin\omega t = qd \sin\omega t\, \vec{e}_z$$

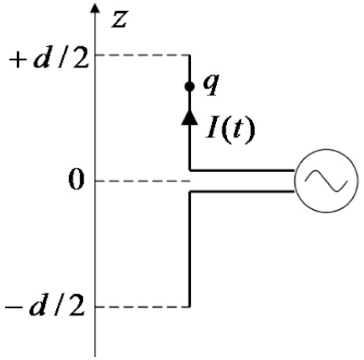
$$\Rightarrow a = \frac{d^2}{dt^2} x = -\omega^2 d \sin\omega t$$

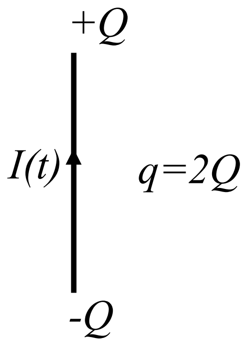
$$\Rightarrow \langle a^2 \rangle = \frac{1}{2}\omega^4 d^2 \qquad \text{mais } P_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} a^2 \quad \text{(Formule de Larmor)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\langle a^2 \rangle = \frac{q^2 d^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}} \qquad [P_{rad}] = [\mathrm{W}]$$









$$q(t)=2\int I_0\cos\omega t dt=\frac{2I_0}{\omega}\sin\omega t=q_0\sin\omega t$$

$$q_0=\frac{2I_0}{\omega}$$

Puissance «rayonnée» [W]

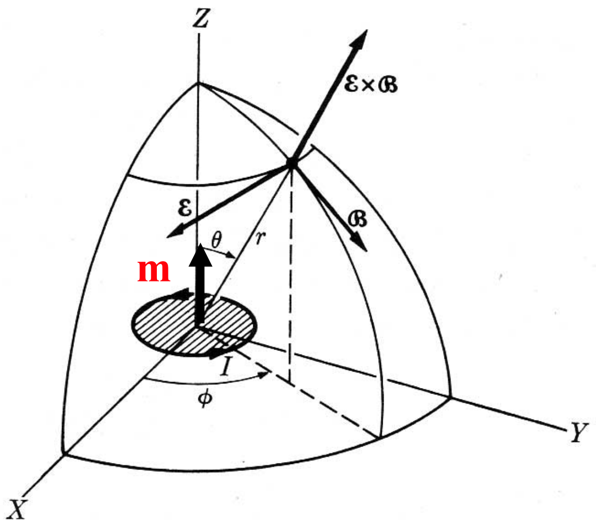
$$P_{rad}=\frac{q^2d^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0c^3}=\frac{I_0^2\omega^2d^2}{12\pi\varepsilon_0c^3}=\frac{1}{2}R_{rad}I_0^2$$

Résistance de «rayonnement» [Ohms]

$$R_{rad}=\frac{\omega^2d^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}=787\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$$

Puissance rayonnée par un dipôle magnétique oscillant

m = Moment de dipôle magnétique



Radiation de dipôle magnétique: $\langle P_{rad} \rangle_{M1} = \frac{1}{c^2} \frac{m_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$

Radiation de dipôle électrique: $\langle P_{rad} \rangle_{E1} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$

$$m_0 = AI = \pi(d/2)^2 \frac{q}{\pi d / v} = v\frac{1}{4} dq \approx v p_0$$

$\Rightarrow$

$$\langle P_{rad} \rangle_{M1} \approx \frac{v^2}{c^2} \langle P_{rad} \rangle_{E1}$$

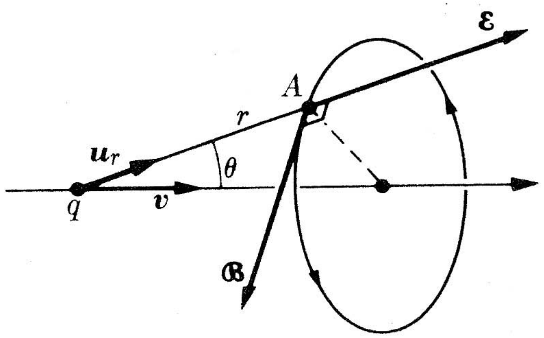
Pour $v << c$ $\Rightarrow$

$$\langle P_{rad} \rangle_{M1} << \langle P_{rad} \rangle_{E1}$$

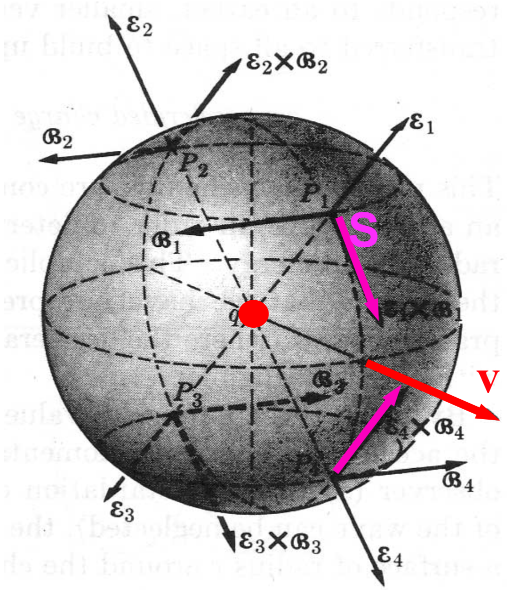
$\Rightarrow$

Pour la meme vitesse $v << c$ et la meme dimension d,
le dipôle électrique produit un rayonnement plus grande que le dipôle magnétique.

Charge en mouvement rectiligne **uniforme**



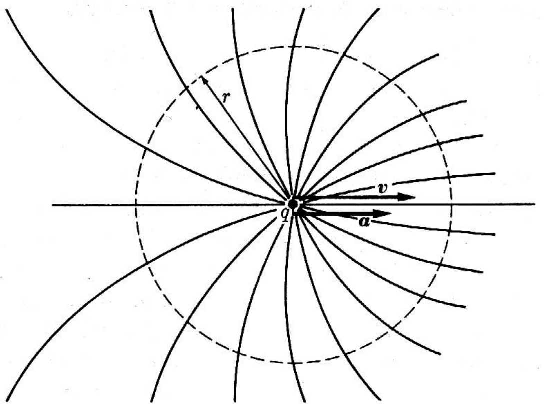
v<<c

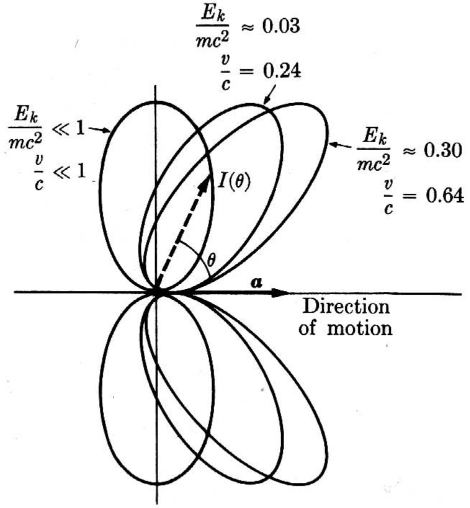


$$P_{rad} = \oint_S \mathbf{S}\cdot d\mathbf{s} = 0$$

(pas de radiation)

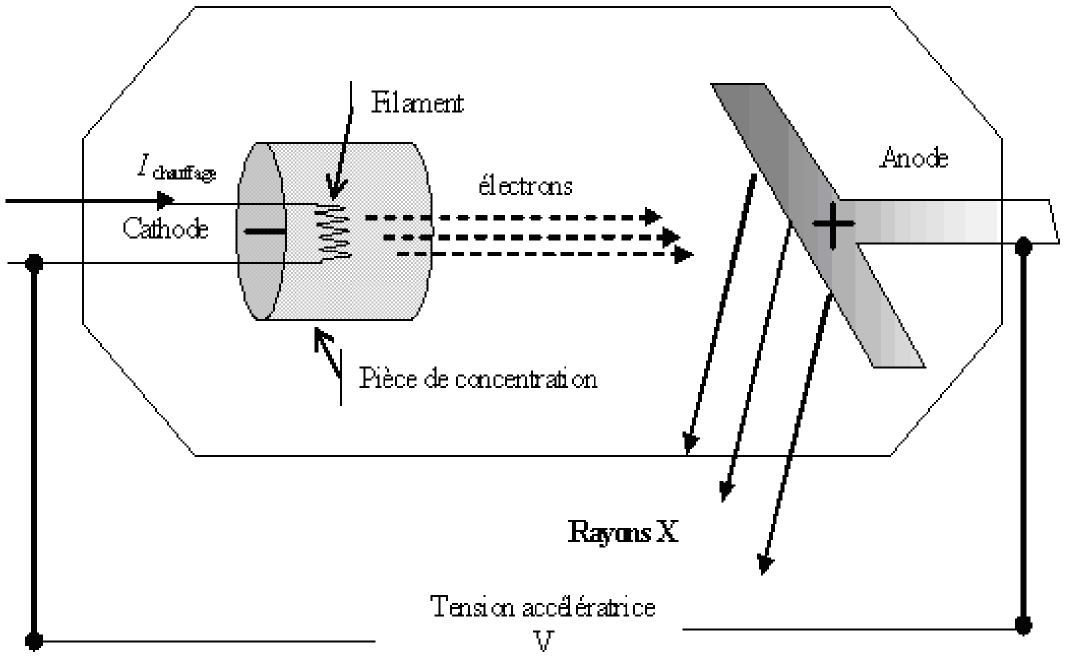
Charge en mouvement rectiligne **accélérée**



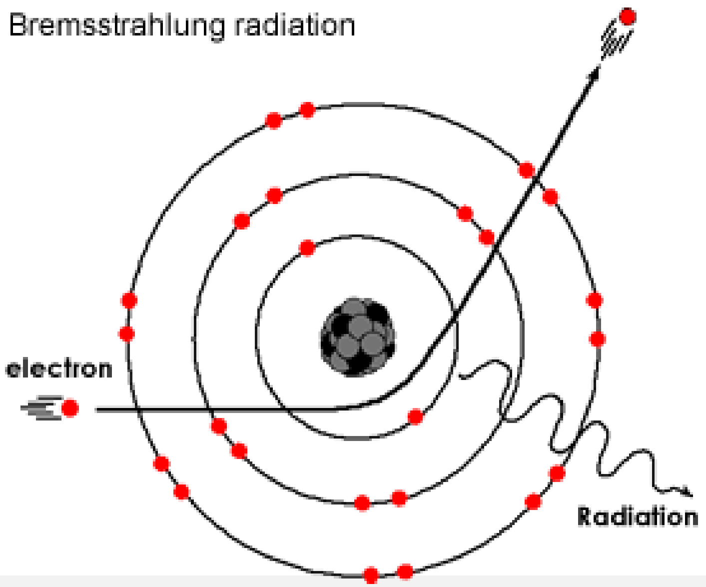


$$P_{rad} \neq 0$$

Radiation d'une charge accélérée



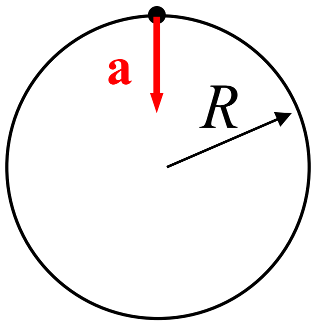
Rayonnement émis par une charge freinée par impact sur la cible.



Rayonnement émis par une charge deviée par «impact» sur un atome.

Charge (électron) en mouvement circulaire uniforme
(rayonnement synchrotron)

$$P_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} a^2 \qquad m_0c^2 \cong 8\times10^{-14}\ \mathrm{J} \cong 0.5\ \mathrm{MeV}$$



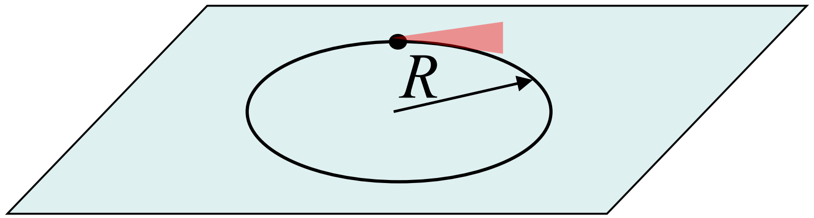
i) cas classique: $E_{cin} \ll m_0c^2$

$$a = \frac{v^2}{R} \propto \frac{E_{cin}}{R}$$

$$P_{rad} \propto a \propto \frac{E_{cin}{}^2}{R^2} \;;\quad \lambda \cong \frac{c}{\upsilon} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi Rc}{v} > R$$

Pour la relativité l'énergie d'une particule est: $E = m_0c^2 + cp$

ii) cas ultrarelativiste: $E_{cin} \gg m_0c^2$



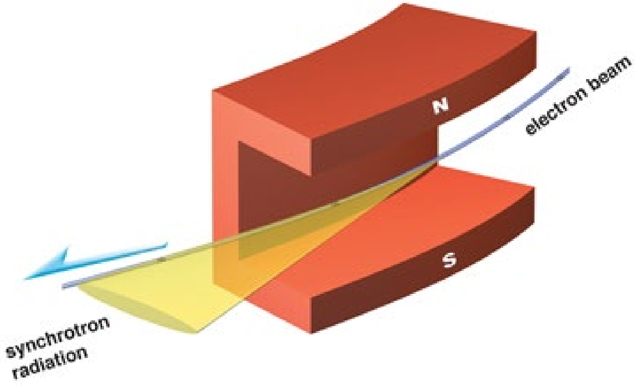
$$E_{cin} = cp \;;\quad a \propto \frac{p^2}{R} \propto \frac{E_{cin}^2}{R}$$

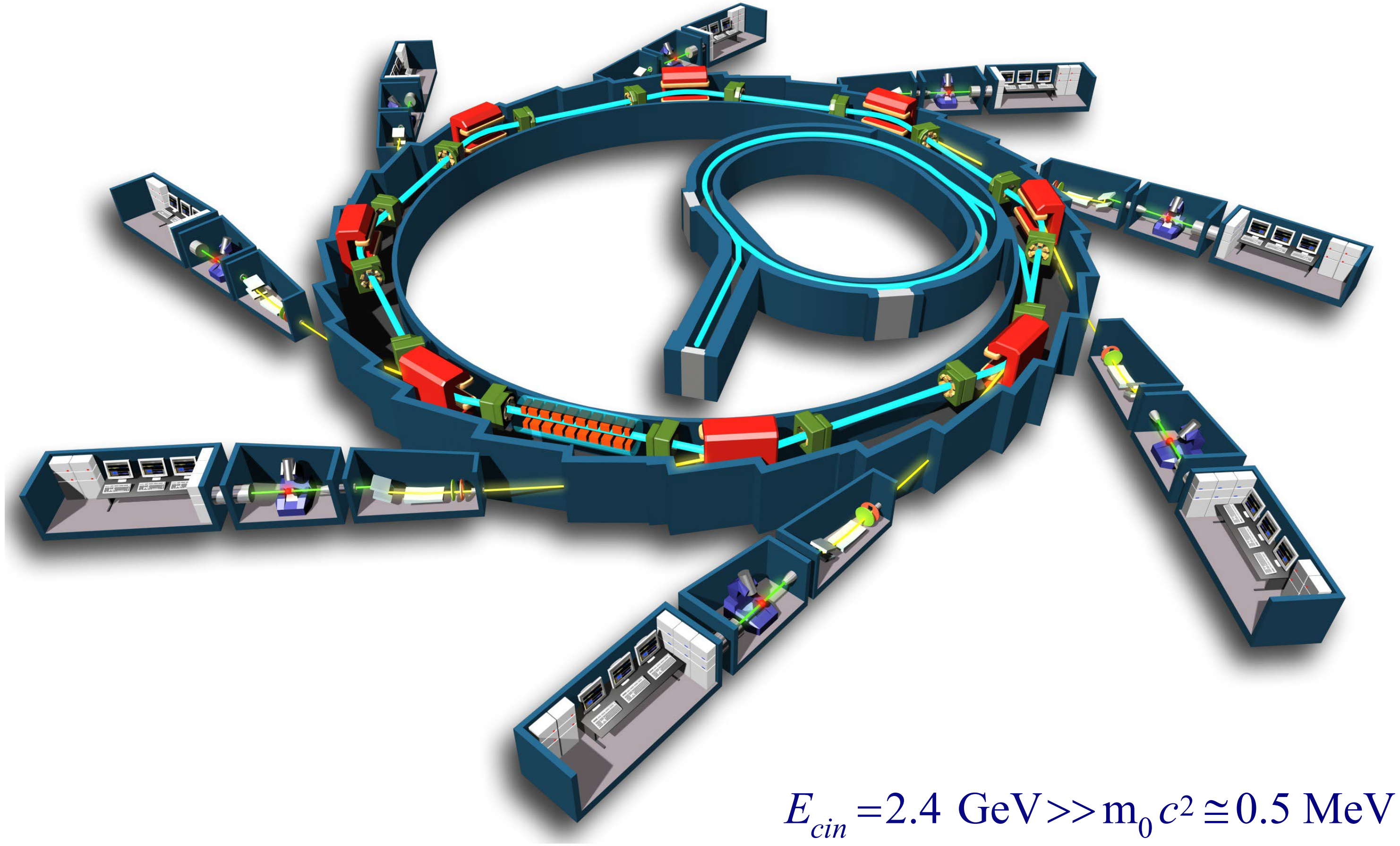
$$P_{rad} \propto a \propto \frac{E_{cin}{}^4}{R^2} \;;\quad \lambda \cong \frac{2R}{\gamma^3} \;;\quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Pour $R \cong 10^2$ m et $\gamma \cong 10^4$ $\Rightarrow \lambda \cong 10^{-10}$ m !!!

1947: Première rayonnement synchrotron, General Electric, USA.

2000-…..: «Swiss Light Source (SLS)», PSI, Villigen, Suisse





$$E_{cin} = 2.4\ \text{GeV} >> m_0 c^2 \cong 0.5\ \text{MeV}$$